19. Let $\propto = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\beta = \{1, x, x^2\}$ and $\gamma = \{1\}$ Define $T : M_{2\times2}F \to F$ by $T(A) = tr(A)$. Compute $[T]_{\propto}^{\gamma}$.

$\propto = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\beta = \{1, x, x^2\}$ மற்றும் $\gamma = \{1\}$ என்று எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது. $T : M_{2\times2}F \to F$ என்பது $T(A) = tr(A)$ கொண்டு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே $[T]_{\propto}^{\gamma}$ ஐக் காண்க.

20. For $A, B \in F_n$, then $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

$A, B \in F_n$ எனில் $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ என்பதை நிரூபி.

APRIL/MAY 2025

FMA61 — LINEAR ALGEBRA

Industries Arts & Science College T.V.Malai

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

1. Define linearly dependent.

நேரியல் சார்புடையது வரையறு.

2. Give an example for basis.

அடிப்படைக்கு ஒரு உதாரணம் கொடுங்கள்.

3. Show that $\langle (a, b), (c, d) \rangle = ac - bd$ on R^2 is not an inner product on given vector space.

R^2 இல் $\langle (a, b), (c, d) \rangle = ac - bd$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட திசையன் வெளியில் ஒரு உட்பெருக்கம் இல்லை என்பதை நிரூபி.

4. Let $x = (2, 1+i, i)$ and $y = (2-i, 2, 1+2i)$ be vectors in C^3 compute $\langle x, y \rangle$.

$x = (2, 1+i, i)$ மற்றும் $y = (2-i, 2, 1+2i)$ என்பது C^3 உள்ள திசையன்கள் ஆகும் $\langle x, y \rangle$ ஐக் கண்டறிக.

5. Define Subalgebra over 'F'

'F' -இன் மீதான துணை இயற்கணிதத்தை வரையறு.

6. If 'V' is finite dimensional over 'F' and if $T \in A(V)$ is singular then there exist an $S \neq 0$ in $A(V)$ such that $ST = TS = 0$.

'V' என்பது 'F' க்கு மேல் முடிவுறு பரிமாணம் கொண்டதாக இருந்தால் மற்றும் $T \in A(V)$ வழு வாய்ந்ததாக இருந்தால் $ST = TS = 0$ என்பது இருக்கும்படி ஒரு $S \neq 0$, $A(V)$ இல் உள்ளது என்பதை நிரூபி.

7. Define Invariant.

மாற்றமில்லாத உள்வெளி வரையறு.

8. Define Similar.

ஒத்ததை வரையறு.

9. Define Transpose.

இடமாற்றத்தை வரையறு.

10. Define symmetric matrix.

சமச்சீர் அணியை வரையறு.

'V' என்பது ஒரு உள் பெருக்க வெளி. பிறகு $x, y, z \in V$ மற்றும் $c \in F$ க்கு பின்வரும் கூற்றுகள் உண்மையாக இருக்கும் என்பதை நிரூபி.

(அ) $\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

(ஆ) $\langle x, cy \rangle = \bar{c} \langle x, y \rangle$

(இ) $\langle x, 0 \rangle = \langle 0, x \rangle = 0$

(ஈ) $\langle x, x \rangle = 0$ என்றால் மட்டுமே $x = 0$

(உ) அனைத்து $x \in V_1$ க்கும் $\langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle$ எனில் $y = z$.

18. If $\lambda \in F$ is a characteristic root of $T \in A(V)$ then λ is the root of minimal polynomial of T. In particular T only has a finite number of characteristics roots in 'F'.

$\lambda \in F$ என்பது $T \in A(V)$ இன் சிறப்பியல்பு மூலமாக இருந்தால், λ என்பது T இன் சிறும் பல்லுறுப்பானின் மூலம் என்பதை நிரூபி. குறிப்பாக F இல் T க்கு ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையிலான சிறப்பியல்பு மூலங்கள் மட்டுமே உள்ளன.



(b) If any two rows are equal $(r \neq s,\ v_r = v_s)$ then prove that $\det A = 0$

'A' இன் இரண்டு வரிசைகள் சமமாக இருந்தால் (அதாவது $r \neq s$க்கு $v_r = v_s$), பின் $\det A = 0$ என்பதை நிரூபி.

SECTION C — ($3 \times 10 = 30$ marks)

Answer any THREE questions.

16. Prove that set

$\{x^3 + 2x^2, -x^2 + 3x + 1, x^3 - x^2 + 2x - 1\}$ is linearly independent

$\{x^3 + 2x^2, -x^2 + 3x + 1, x^3 - x^2 + 2x - 1\}$ என்னும் கணம் நேரியல் சார்பற்றவை என்று நிரூபி.

17. Let 'V' be an inner product space. Then for $x, y, z \in V$ and $c \in F$ the following statements are true.

(a) $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$

(b) $\langle x, cy\rangle = \bar{c}\,\langle x, y\rangle$

(c) $\langle x, 0\rangle = \langle 0, x\rangle = 0$

(d) $\langle x, x\rangle = 0$ iff $x = 0$

(e) If $\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle$ for all $x \in V_1$ then $y = z$.

SECTION B — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer ALL questions.

11. (a) Prove that vectors $(1,4,-2), (-2,1,3)$ and $(-4,11,5)$ are linearly independent.

$(1,4,-2), (-2,1,3), (-4,11,5)$ என்னும் திசையன்கள் நேரியல் சார்பற்றவை என்று நிரூபி.

Or

(b) Let $S = \{(1,-1,2),(2,3,1),(4,5,6)\}$ be a subset of $V_3(R)$. Prove that S is linearly independent.

$S = \{(1,-1,2),(2,3,1),(4,5,6)\}$ என்பது $V_3(R)$ இன் உட்கணம் ஆகும். S என்பது நேரியல் சார்பற்றது என்று நிரூபி.

12. (a) Let 'β' be a basis for a finite dimensional inner product space. Prove that if $\langle x, z\rangle = 0$ for all $z \in \beta$ then $x = 0$.

'β' என்பது முடிவுள்ள பரிமாண உட்பெருக்க வெளியின் அடிப்படை என்று வைத்துக்கொள்வோம் அனைத்து $z \in \beta$ க்கும் $\langle x, z\rangle = 0$ ஆக இருந்தால், $x = 0$ என்பதை நிரூபி.

Or

Industries Arts & Science College T.V.Malai

(b) Let 'β' be a basis for a finite dimensional inner product space. Prove that if $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle$ for all $z \in \beta$ then $x = y$.

'β' என்பது முடிவுள்ள பரிமாண உட்பெருக்க வெளியின் அடிப்படை என்று வைத்துக்கொள்வோம். அனைத்து $z \in \beta$ க்கும் $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle$ ஆக இருந்தால் $x = y$ என்பதை நிரூபி.

13. (a) If 'V' is finite dimensional over 'F' and if $T \in A(V)$ is invertible if and only if the constant term of minimal polynomial for T is not 0.

'V' என்பது 'F'க்கு மேல் முடிவுறு பரிமாணம் கொண்டதாக இருந்தால் மற்றும் $T \in A(V)$ நேர்மாறிடக் கூடியதாக இருக்க தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை T-இன் சிறும் பல்லுறுப்பானின் மாறிலி உறுப்பு பூச்சியமற்றதாகும் என நிறுவுக.

Or

(b) The element $\lambda \in F$ is a characteristic root of $T \in A(V)$ if and only if for some $v \neq 0$ in V, $vT = \lambda v$.

$\lambda \in F$ என்ற உறுப்பு $T \in A(V)$ இன் ஒரு சிறப்பியல்பு மூலமாக இருக்க தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை சில $v \neq 0$-க்கு $vT = \lambda v$ என்று நிறுவுக.

14. (a) If the matrix $A \in F_n$ has all its characteristic roots in F, then there is matrix $C \in F$ such that CAC^{-1} is a triangular matrix.

அணி $A \in F_n$-இன் அனைத்து சிறப்பு மூலங்களும் F இல் இருந்தால், CAC^{-1} என்பது ஒரு முக்கோண அணி ஆக இருக்கும்படி ஒரு அணி $C \in F$ உள்ளது என்பதை நிரூபி.

Or

(b) Prove that every linear transformation $T \in A_F(V)$ satisfies its characteristics polynomial.

ஒவ்வொரு $T \in A_F(V)$ என்னும் நேரியல் உருமாற்றமும் அதன் சிறப்பியல்பு பல்லுறுப்பானை திருப்திப்படுத்துகிறது என்பதை நிரூபி.



15. (a) The determinant of a triangular matrix is the product of its entries on the main diagonal.

ஒரு முக்கோண அணியின் அணிக்கோவை அதன் முக்கிய மூலை விட்டத்தில் உள்ள உள்ளீடுகளின் பெருக்கல் என்பதை நிரூபி.

Or